أجوبة امتحان الدورة العادية 2008

1

لدينا : الفلكة $(\mathcal{S})$ معرفة بالمعادلة التالية :

$(\mathcal{S}):\ x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$

إذن : $(\mathcal{S}):\ (x^2-2x)+(y^2)+(z^2-4z)+2=0$

يعني : $(\mathcal{S}):\ (x-1)^2+y^2+(z-2)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$

إذن : $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها $\Omega(1,0,2)$ و شعاعها $\sqrt{3}$.

2

لدينا : $\begin{cases} O(0,0,0) \\ A(0,-1,1) \\ B(1,-1,0) \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \overrightarrow{OA}(0,-1,1) \\ \overrightarrow{OB}(1,-1,0) \end{cases}$

و منه :

$$\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}-1&-1\\1&0\end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}0&1\\-1&-1\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=1\vec{\imath}-(-1)\vec{\jmath}+1\vec{k}\ =\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$$

إذن : $(1,1,1)$ هو مثلوث احداثيات المتجهة $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OB}$.

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوى (OAB) .

بما أن المتجهة $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$ منظمية على المستوى (OAB) .

فإن $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$ متعامدتان . أي : $\overrightarrow{OM}\cdot\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right)=0$.

يعني : $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0$ إذن : $x+y+z=0$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن معادلة ديكارتية للمستوى (OAB) .

2

لدينا : $(OAB): x+y+z=0$

و لدينا كذلك $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها $\Omega(1,0,2)$ و شعاعها $\sqrt{3}$.

$$d(\Omega,(OAB))=\frac{|1+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

إذن : المستوى (OAB) مماس للفلكة $(\mathcal{S})$ في نقطة واحدة .

لدينا : $\boxed{A\epsilon(OAB)}$ $(\mathbf{1})$

و لدينا أيضا : $(\mathcal{S}):\ x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$

نلاحظ أن : $0^2+(-1)^2+1^2-2(0)-4(1)+2=0$

إذن : $\boxed{A\epsilon(\mathcal{S})}$ $(\mathbf{2})$

من (1) و (2) نستنتج أن A هي نقطة تماس (OAB) و الفلكة $(\mathcal{S})$.

1

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2-6z+34=0$

لدينا : $\Delta=(-6)^2-4(34)=36-136=-100=(10i)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 :

$$z_1=\frac{6-10i}{2}=3-5i \quad \text{و} \quad z_2=\frac{6+10i}{2}=3+5i$$

2 أ

لدينا : $aff(\vec{u})=4-2i$ و الإزاحة T معرفة بما يلي :

$$T_{\vec{u}}:\ (\mathcal{P}) \longmapsto (\mathcal{P})$$
$$\qquad M(z) \longmapsto M'(z')$$

لدينا : $T_{\vec{u}}(M)=M'$

إذن : حسب التعريف المتجهى للإزاحة نكتب : $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

و منه : $aff\left(\overrightarrow{MM'}\right)=aff(\vec{u})$ يعني : $z'-z=4-2i$

أي : $z'=z+4-2i$

و بالتالي : الإزاحة T معرفة بما يلي :

$$T_{\vec{u}}:\ (\mathcal{P}) \longmapsto (\mathcal{P})$$
$$\qquad M(z) \longmapsto M'(z+4-2i)\ (*)$$

لدينا :

$$aff(A)+4-2i=(3+5i)+4-2i$$
$$=7+3i=aff(C)$$

إذن نستنتج أن : $aff(C)=aff(A)+4-2i$

و منه حسب الكتابة العقدية $(*)$ نستنتج أن : $T_{\vec{u}}(A)=C$

2 ب

لدينا : $\begin{cases} aff(A)=a=3+5i \\ aff(B)=b=3-5i \\ aff(C)=c=7+3i \end{cases}$

إذن :

$$\frac{b-c}{a-c}=\frac{(3-5i)-(7+3i)}{(3+5i)-(7+3i)}=\frac{-4-8i}{-4+2i}$$
$$=\frac{-(4+8i)(2i+4)}{(2i-4)(2i+4)}=\frac{-(16-16+40i)}{(2i)^2-4^2}$$
$$=\frac{-40i}{-20}=2i$$

و بالتالي : $\dfrac{b-c}{a-c}=2i$

2 ج

لدينا حسب ما سبق : $\dfrac{b-c}{a-c}=2i$

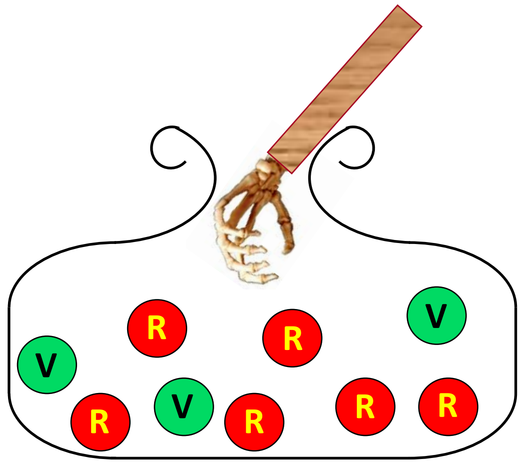
إذن : $\begin{cases} \left|\dfrac{b-c}{a-c}\right|=|2i| \\ \arg\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)\equiv\arg(2i)\ [2\pi] \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} \dfrac{|b-c|}{|a-c|}=2 \\ \arg\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} |b-c|=2|a-c| \\ \left(\overline{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} BC=2AC \\ A\hat{C}B=90° \end{cases}$

و بالتالي : ABC قائم الزاوية في النقطة C و $BC=2\,AC$.



C_9^3

1 أ

$$p\left(\text{كرتين حمراوين و كرة خضراء}\right)=\frac{card\left(\text{كرتين حمراوين و كرة خضراء}\right)}{card(\Omega)}=\frac{C_6^2\times C_3^1}{84}$$

$$=\frac{15\times 3}{84}=\frac{45}{84}=\frac{15}{28}$$

1 ب

الطريقة الأولى :

$$p\left(\text{كرة خضراء على الأقل}\right)=p\left(\text{ثلاث كرات خضراء أو كرتان خضراوان و كرة حمراء أو كرة خضراء و كرتين حمراوين}\right)$$

$$=p\left(\text{ثلاث كرات خضراء}\right)+p\left(\text{كرتان خضراوان و كرة حمراء}\right)+p\left(\text{كرة خضراء و كرتين حمراوين}\right)$$

$$=\frac{card\left(\text{ثلاث كرات خضراء}\right)}{card(\Omega)}+\frac{card\left(\text{كرتان خضراوان و كرة حمراء}\right)}{card(\Omega)}+\frac{card\left(\text{كرة خضراء و كرتين حمراوين}\right)}{card(\Omega)}$$

$$=\frac{C_3^3}{84}+\frac{C_3^2\times C_6^1}{84}+\frac{C_3^1\times C_6^2}{84}$$

$$=\frac{1}{84}+\frac{3\times 6}{84}+\frac{3\times 15}{84}=\frac{16}{21}$$

الطريقة الثانية : إستعمال تقنية الحدث المضاد .

لدينا :
$$\left(\text{الحصول على كرة خضراء واحدة على الأقل}\right)=\overline{\left(\text{الحصول على ثلاث كرات كلها حمراء}\right)}$$

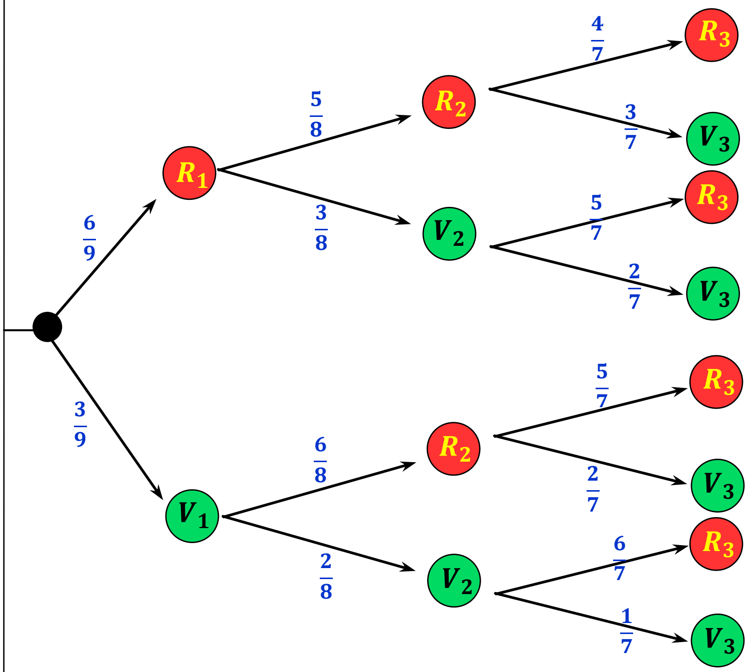
إذن :
$$p\left(\text{الحصول على كرة خضراء واحدة على الأقل}\right)=1-p\left(\text{الحصول على ثلاث كرات كلها حمراء}\right)$$

$$=1-\frac{card\left(\text{الحصول على ثلاث كرات كلها حمراء}\right)}{card(\Omega)}$$

$$=1-\frac{C_6^3}{84}=1-\frac{20}{84}=\frac{64}{84}=\frac{16}{21}$$

1 ج

عندما نسحب عشوائيا بالتتابع و بدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق فإن هذه التجربة العشوائية تصبح ثلاث سحبات متتابعة و مبينة في الشجرة التالية :



من خلال هذه الشجرة المباركة يمكن حساب احتمال أي حدث كيفما كان .

$$p\left(\text{ثلاث كرات حمراء}\right)=p\left(\text{كرة حمراء في السحبة الأولى و كرة حمراء في السحبة الثانية و كرة حمراء في السحبة الثالثة}\right)$$

$$=p(R_1\cap R_2\cap R_3)=p(R_1)\times p(R_2)\times p(R_3)$$

$$=\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{120}{504}=\frac{5}{21}$$

إضافة : أضيف على سبيل الاستئناس الاحتمالات التالية :

$$p\left(\text{ثلاث كرات خضراء}\right)=\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{1}{84}$$

$$p\left(\text{كرتين خضراوين على الأقل}\right) = \left(\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\right) + \left(\frac{3}{9}\times\frac{6}{8}\times\frac{2}{7}\right) + \left(\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{6}{7}\right) + \left(\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{1}{7}\right)$$

$$= \frac{1}{14} + \frac{1}{14} + \frac{1}{14} + \frac{1}{84} = \frac{19}{84}$$

I - 1 - أ

إذن : $(\forall x > 0)\ ;\ g'(x) = \dfrac{x-2}{x}$

I - 1 - ب

ليكن x عنصرا من المجال $]0;2]$. يعني : $0 < x \leq 2$

يعني : $-2 < x-2 \leq 0$ و منه : $\dfrac{x-2}{x} \leq 0\ ;\ \forall x \in\ ]0,2]$

يعني : $\forall x \in\ ]0;2]\ ;\ g'(x) \leq 0$

و هذا يعني أن الدالة g تناقصية على المجال $]0;2]$.

ليكن x عنصرا من المجال $[2;+\infty[$.

إذن : $x \geq 2$ و منه : $x-2 \geq 0$

يعني : $\dfrac{x-2}{x} \geq 0\ ;\ (\forall x \geq 2)$

يعني : $(\forall x \geq 2)\ ;\ g'(x) \geq 0$

يعني أن الدالة g تزايدية على المجال $[2;+\infty[$.

I - 2

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

هذا يعني أن : $x \in\ ]0;2]$ أو $x \in [2;+\infty[$.

الحالة الأولى : $x \in\ ]0;2]$.

لدينا : $x \leq 2$

و بما أن g تناقصية على $]0;2]$ فإن : $g(x) \geq g(2)$.

و لدينا : $g(2) = 2 - 2\ln 2 \approx 0{,}6 > 0$

إذن : $\forall x \in\ ]0;2]\ ;\ g(x) \geq g(2) > 0$

يعني : $\boxed{\forall x \in\ ]0;2]\ ;\ g(x) > 0}\ (\mathbf{1})$

الحالة الثانية : $x \in [2;+\infty[$.

لدينا : $x \geq 2$.

بما أن : g تزايدية على $[2;+\infty[$ فإن : $g(x) \geq g(2)$

و لدينا : $g(2) \approx 0{,}6 > 0$

إذن : $\forall x \in [2;+\infty[\ ;\ g(x) \geq g(2) > 0$

يعني : $\boxed{\forall x \in [2;+\infty[\ ;\ g(x) > 0}\ (\mathbf{2})$

نلاحظ أنه في كلتا الحالتين لدينا : $g(x) > 0$.

إذن : من $(\mathbf{1})$ و $(\mathbf{2})$ نستنتج أن : $\forall x \in\ ]0;+\infty[\ ;\ g(x) > 0$.

II - 1

لدينا : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x - (\ln x)^2)$

$$= 0 - (\ln 0^+)^2 = 0 - (-\infty)^2 = 0 - (+\infty) = -\infty$$

إذن : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

إذن محور الأراتيب مقارب عمودي للمنحنى بجوار الصفر على اليمين .

II - 2 - أ

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = 4\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$$

$$= 4\lim_{\substack{t\to+\infty\\ t=\sqrt{x}}}\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 = 4\times 0^2 = 0$$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$

II - 2 - ب

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x - (\ln x)^2)$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \underbrace{\frac{(\ln x)^2}{x}}\right) = (+\infty)(1-0) = +\infty$$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

و لدينا كذلك : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-(\ln x)^2}{x}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \underbrace{\frac{(\ln x)^2}{x}}\right) = (1-0) = 1$$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

II - 2 - ج

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x - (\ln x)^2 - x)$

$$= \lim_{x\to+\infty} -(\ln x)^2 = -(+\infty)^2 = -\infty$$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = -\infty$

حصلنا لحد الآن على النهايات التالية :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x) = -\infty \end{cases}$$

و هذه النهايات تُمكننا من أن نقول أن $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم ذو المعادلة $y = x$ بجوار $+\infty$.

II 2 د

لدينا : $\forall\ x \in]0;+\infty[\ ;\ f(x)-x=-(\ln x)^2$

نعلم أن مربع أي عدد حقيقي يكون دائما موجبا .

يعني : $\forall\ x \in]0;+\infty[\ ;\ (\ln x)^2 \geq 0$

يعني : $\forall\ x \in]0;+\infty[\ ;\ -(\ln x)^2 \leq 0$

يعني : $\forall\ x \in]0;+\infty[\ ;\ f(x)-x \leq 0$

يعني : $\forall\ x \in]0;+\infty[\ ;\ f(x) \leq x$

إذن $(\mathscr{C})$ يوجد فوق المستقيم (Δ) على المجال $]0;+\infty[$.

II 3 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $f(x)=x-(\ln x)^2$.

إذن : $f'(x)=1-2(\ln x)(\ln x)'$

$$=1-\frac{2\ln x}{x}=\frac{x-2\ln x}{x}=\frac{g(x)}{x}$$

إذن : $\forall\ x \in]0,+\infty[\ ;\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$

لدينا : حسب السؤال I 2) : $\forall\ x \in]0;+\infty[\ ;\ g(x)>0$

إذن : $\forall\ x \in]0;+\infty[\ ;\ \dfrac{g(x)}{x}>0$

و منه : $\forall\ x \in]0;+\infty[\ ;\ f'(x)>0$

و هذا يعني أن f دالة تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.

II 3 ب

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

II 3 ج

نعلم أن المعادلة الديكارتية للمماس (T) للمنحنى في النقطة التي أفصولها x_0 تكتب بصفة عامة على الشكل التالي :

$(T) : y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

إذن : $(T) : y=f'(1)(x-1)+f(1)$

و لدينا : $f(1)=1-(\ln 1)^2=1$

و كذلك : $f'(1)=\dfrac{g(1)}{1}=\dfrac{1-2\ln 1}{1}=1$

إذن : $(T) : y=1(x-1)+1$

يعني : $(T) : y=x$

II 4

من خلال جدول تغيرات الدالة f ، نلاحظ أن f دالة تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$ و معرفة بما يلي : $f\ :\ ]0,+\infty[\ \longmapsto\ \mathbb{R}$

إذن f تقابل من المجال $]0;+\infty[$ نحو $\mathbb{R}$.

و بما أن 0 عنصر من $\mathbb{R}$ فإنه يمتلك سابقا واحدا α من المجال $]0;+\infty[$.

يعني : $\exists!\ \alpha \in]0;+\infty[\ ;\ f(\alpha)=0$

يعني أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$.

لدينا :
$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-1 \approx -0,6 \\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\left(\ln\frac{1}{2}\right)^2 \approx 0,02 \end{cases}$$

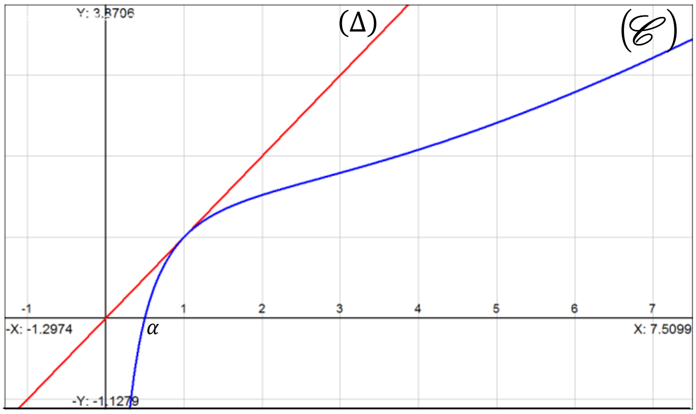
نلاحظ أن : $-0,6<0<0,02$ يعني : $f\left(\frac{1}{e}\right)<0<f\left(\frac{1}{2}\right)$

بإدخال الدالة العكسية f^{-1} نحصل على :

$$f^{-1}\left(f\left(\frac{1}{e}\right)\right)<f^{-1}(0)<f^{-1}\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

يعني : $\dfrac{1}{e}<\alpha<\dfrac{1}{2}$

II 5



II 6 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. لدينا : $H(x)=x\ln x-x$

إذن : $H'(x)=(x\ln x-x)'=\ln x+1-1=\ln x=h(x)$

إذن الدالة H دالة أصلية للدالة h على المجال $]0;+\infty[$.

و لدينا : $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx=\int_1^e h(x)\,dx=[H(x)]_1^e$

$$=H(e)-H(1)=(e\ln e-e)-(1\ln 1-1)=1$$

II 6 ب

$$\int_1^e (\ln x)^2\,dx=\int_1^e \underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{(\ln x)^2}_{v}\,dx=[uv]_1^e-\int uv'\,dx$$

$$=[x(\ln x)^2]_1^e-2\int_1^e \frac{x\ln x}{x}dx$$

$$=e-2\int_1^e \ln x\,dx=e-2$$

III 6 ج

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (Δ) و المستقيمين $x=1$ و $x=e$.

بما أن التكامل يقيس عادة مسافة أو مساحة أو حجم .

فإن : $\mathcal{A} = \int_1^e |f(x) - x|\,dx$ $(*)$

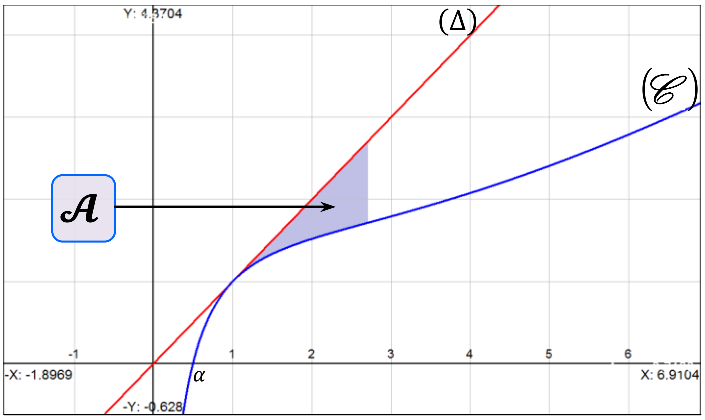
لدينا حسب السؤال II) 2) د) : $\boxed{\forall\, x \in\,]0;+\infty[\; ;\; f(x) - x \le 0}$

إذن : $\forall\, x \in [1;e]\; ;\; f(x) - x \le 0$

و منه : $\forall\, x \in [1;e]\; ;\; |f(x) - x| = x - f(x)$

و بالتالي : $\mathcal{A} = \int_1^e |f(x) - x|\,dx = \int_1^e (x - f(x))\,dx$

$= \int_1^e (x - x + (\ln x)^2)\,dx = \int_1^e (\ln x)^2\,dx = e - 2$



و كإضافة على هذا الجواب ، يُطلَب منا في بعض الأحيان حساب هذه المساحة بالسنتمتر مربع (cm^2) . و من أجل ذلك نبحث عن وحدة المعلم .

نفترض أن : $l'unité = \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3\ cm$

إذن : $\mathcal{A} = (e-2)(l'unité)^2$

$= (e-2)(3\ cm)^2 = 9(e-2)\ cm^2$

و في حالة ما لم يُطلب منك ذلك فلا داعي لهذا كله .

أو كما يقول المثل الياباني : الزيادة من رأس الأحمق .

1 III

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(P_n) : (\forall n \in \mathbb{N})\; ;\; 1 \le u_n \le 2$

لدينا : $1 \le 2 \le 2$ يعني : $1 \le u_0 \le 2$

إذن العبارة (P_0) صحيحة

نفترض أن : $(\forall n \in \mathbb{N})\; ;\; 1 \le u_n \le 2$

نعلم حسب السؤال II) 3) أ) أن الدالة f تزايدية على المجال $]0;+\infty[$.

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N})\; ;\; f(1) \le f(u_n) \le f(2)$

و لدينا : $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 2 - (\ln 2)^2 \approx 1{,}5 \end{cases}$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N})\; ;\; 1 \le f(u_n) \le 1{,}5 < 2$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N})\; ;\; 1 \le f(u_n) \le 2$

و منه : $(P_n) : (\forall n \in \mathbb{N})\; ;\; 1 \le u_{n+1} \le 2$

إذن العبارة (P_{n+1}) صحيحة

و بالتالي حسب مبدأ الترجع : $(\forall n \in \mathbb{N})\; ;\; 1 \le u_n \le 2$

2 III

لدينا حسب السؤال II) 2) د) : $\forall\, x \in\,]0;+\infty[\; ;\; f(x) - x \le 0$

لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N})\; ;\; 1 \le u_n \le 2$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N})\; ;\; u_n \in [1;2] \subset\,]0;+\infty[$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N})\; ;\; u_n \in\,]0;+\infty[$

إذن : نستطيع تطبيق النتيجة $(*)$ من أجل $x = u_n$.

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N})\; ;\; f(u_n) - u_n \le 0$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N})\; ;\; f(u_n) \le u_n$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N})\; ;\; u_{n+1} \le u_n$

و منه : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية .

3 III

لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N})\; ;\; 1 \le u_n \le 2$

إذن : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية مصغورة بالعدد 1 .

و بما أنها تناقصية فهي متقاربة .

أو بتعبير آخر : $\begin{cases} \text{مصغورة } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ \text{تناقصية } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{cases} \Rightarrow \text{متقاربة } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

و نهايتها ℓ تحقق : $f(\ell) = \ell$

يعني : $\ell - (\ln \ell)^2 = \ell$ يعني : $-(\ln \ell)^2 = 0$

يعني : $\ln \ell = 0$ أي : $\ell = 1$